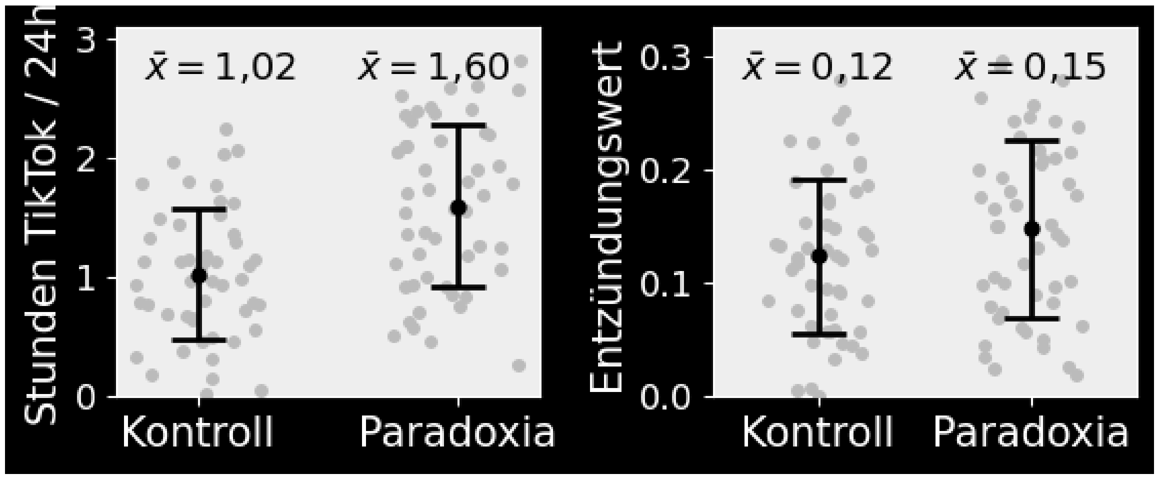
M24 Statistik 1: Sommersemester 2024

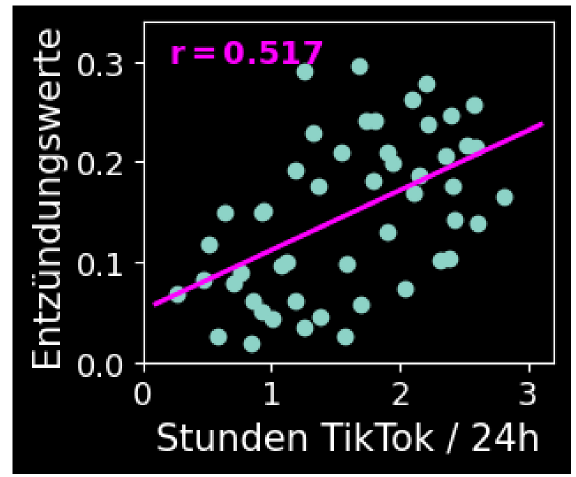
Vorlesung 10: Signifikanztestung

Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam

Kurze Zwischenbilanz: Sie haben Mittelwertsunterschiede zwischen Paradoxikern und Kontrollen sowohl für TikTok-Online-Zeit gefunden, als auch für Entzündungswerte (allerdings mit einer geringeren Effektstärke). Dazu gibt es einen mysteriösen Zusammenhang zwischen beiden abhängigen Variablen: mehr TikTok-Zeit = höherer Entzündungswert.





Die finale Frage lautet nun: welcher dieser Effekte ist **statistisch signifikant** und welcher Effekt ist vermutlich eher eine Zufallsbeobachtung?

Signifikanztestung

Ziel der **Signifikanztestung** ist zu klären, inwieweit ein empirischer Effekt $\hat{\theta}$ **statistisch bedeutsam** ist — oder aber durch Zufall erklärt werden kann. Signifikanztests bieten damit ein **Kriterium, um wissenschaftliche Hypothesen zu überprüfen**.

Die Signifikanztestung **grenzt sich zur praktischen Signifikanz im Rahmen der Effektstärke ab**, da Effekte stark sein können, ihre Beobachtung aber unter Umständen dennoch durch Zufall erklärt werden kann.

Zwei etablierte Frameworks zur Signifikanztestung haben sich im Lauf der Zeit entwickelt: die **Bayesianische Testung** und die **Nullhypothesentestung**. In Statistik 1 betrachten wir ausschließlich das Framework der Nullhypothesentestung.

Nullhypothese und Alternativhypothese

Nullhypothese (H_0)

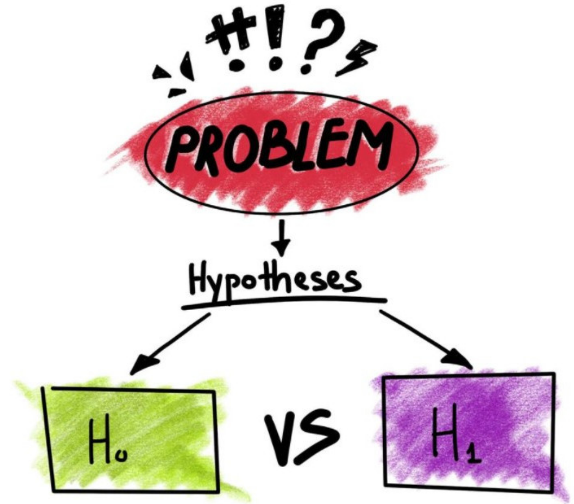
Annahme, dass ein Effekt θ in der Population *nicht vorliegt*.

- Die Häufigkeit des Haarschneidens und Haardichte **hängen nicht** zusammen.
- Frauen haben **keine höhere** emotionale Intelligenz als Männer.

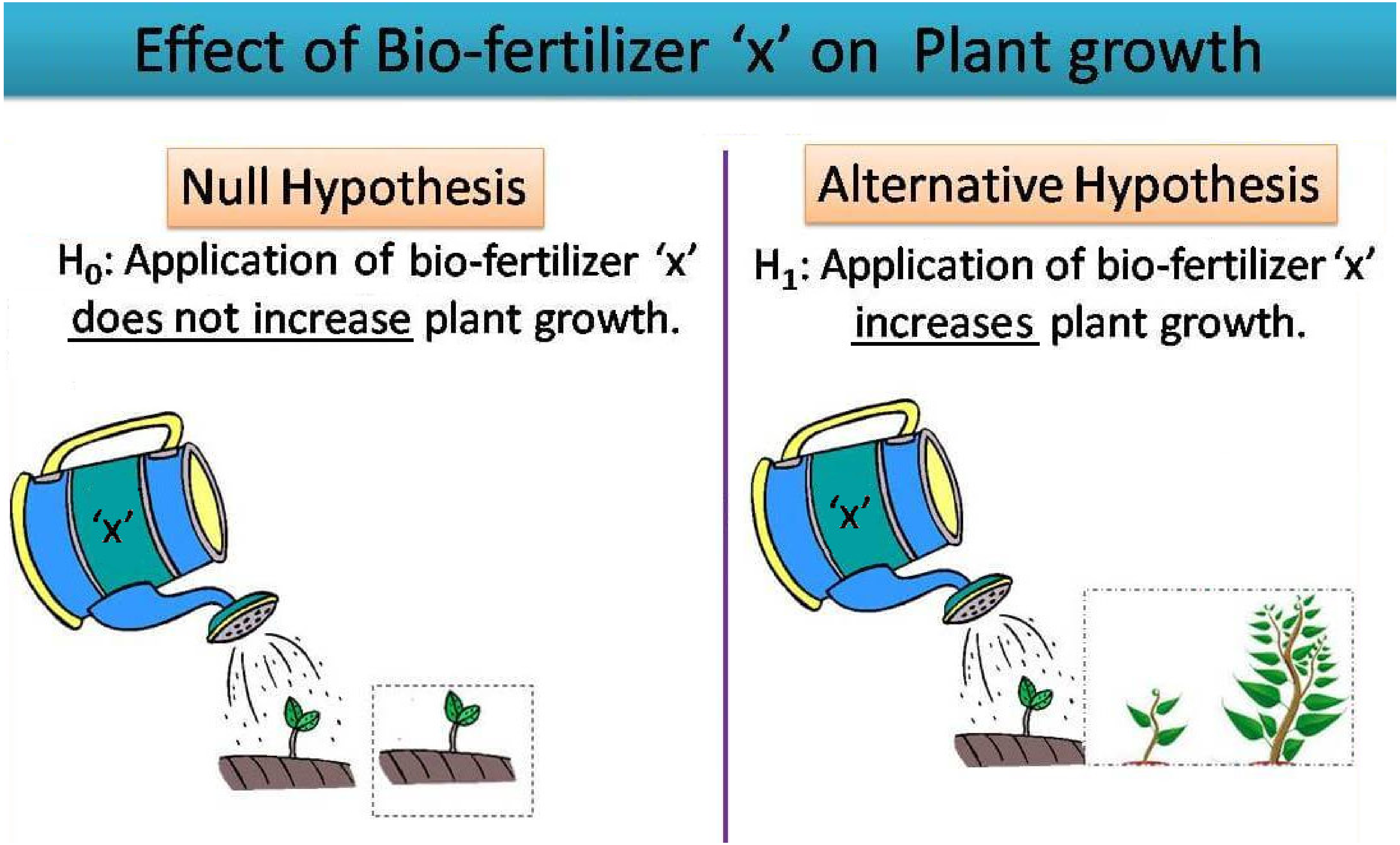
Alternativhypothese (H_1)

Annahme, dass ein Effekt θ in der Population *vorliegt*.

- Die Häufigkeit des Haarschneidens und Haardichte **hängen** zusammen.
- Frauen haben **eine höhere** emotionale Intelligenz als Männer.



Nullhypothese und Alternativhypothese: Beispiel



Bildnachweis[1]

p-Wert

Nullhypothesentestung nach Fisher

- Betrachtet wird ausschließlich die Nullhypothese.
- Ziel ist es zu zeigen, dass der **Stichprobeneffekt** $\hat{\theta}$ **unter der Annahme dieser Nullhypothese so unwahrscheinlich ist, dass man die Nullhypothese „verwerfen“ oder “ablehnen” kann.**
- In diesem Fall wird der Stichprobeneffekt $\hat{\theta}$ als **signifikant** gewertet.
- Bei der Nullhypothesentestung wird kein Schluss in Bezug auf eine Alternativhypothese gezogen (sie der muss hier nicht einmal formuliert werden!).

Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)

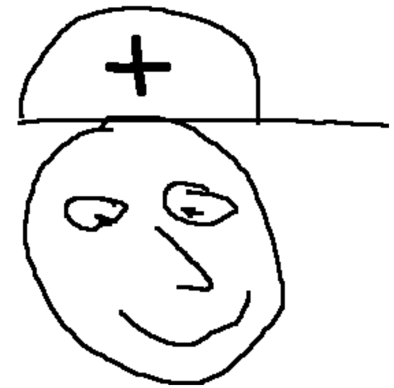
Bei der Nullhypothesentestung nach Fisher werden keine *Wahrscheinlichkeiten von Hypothesen* berechnet — weder $P(H_0)$ noch $P(H_1)$ — sondern die *Wahrscheinlichkeit von Stichprobendaten unter Annahme der Nullhypothese*.

Die Wahrscheinlichkeit von Daten gegeben eine Hypothese, $P(D|H)$, heißt auch **Likelihood**.

Wie kann diese “Wahrscheinlichkeit der Daten unter der Nullhypothese” bestimmt werden?

→ **p-Wert**

p-Wert



Sie überprüfen die Hypothese, dass die mittlere Nasenlänge von Medizinstudierenden (μ_{med}) größer ist als die mittlere Nasenlänge von Psychologiestudierenden (μ_{psych}).

Die zugehörige Nullhypothese H_0 lautet: *Psychologiestudierende haben <u>gleich lange oder kürzere</u> Nasen als Medizinstudierende.*

Oder mathematisch:

$$\mu_{\text{psych}} \leq \mu_{\text{med}} \qquad \text{bzw.} \qquad \theta = \mu_{\text{psych}} - \mu_{\text{med}} \leq 0$$

Sie führen eine Studie durch ($n_{\text{med}} = n_{\text{psych}} = n = 30$) und messen folgenden Gruppenunterschied:

$$\hat{\theta} = \Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{med}} - \bar{x}_{\text{psych}} = 0.2cm$$

Nach Fisher stellen wir nun folgende präzise Frage:

> Was ist die Wahrscheinlichkeit dieses Effektes ($\Delta\bar{x} = 0.2cm$) oder eines noch extremeren Effektes ($\Delta\bar{x} > 0.2cm$), obwohl die Nullhypothese H_0 in Wahrheit zutrifft?

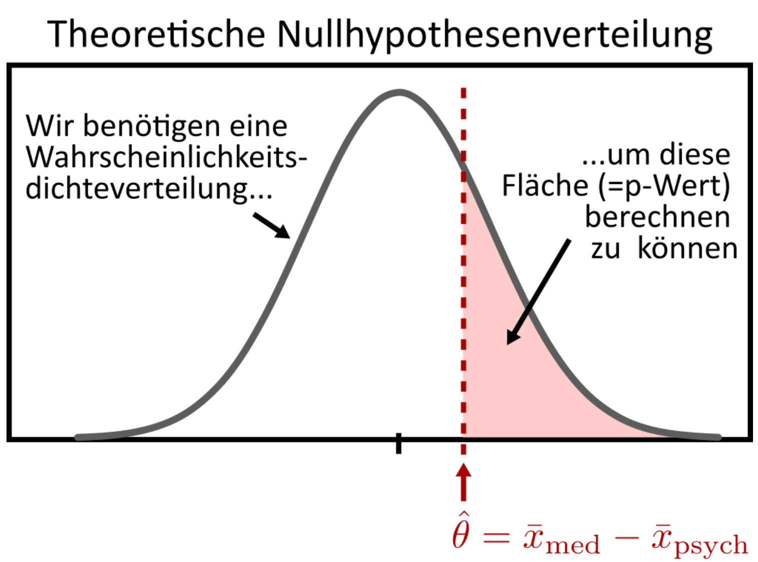
Diese Wahrscheinlichkeit wird als **p-Wert** bezeichnet (*p* für *probability*).

p-Wert

Wir definieren:

Definition Der **p-Wert** ist die Wahrscheinlichkeit den Stichprobeneffekt $\hat{\theta}$ *oder einen noch extremeren Effekt zu erhalten*, obwohl für die Population die Nullhypothese angenommen wird.

- Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine Stichprobe einen Effekt mit dem Wert $\hat{\theta}$ *oder einem extremeren Wert* erzielt, müssen wir die Fläche unter einer Art Stichprobenverteilung berechnen — allerdings unter Annahme der Nullhypothese!
- Wir bezeichnen diese Verteilung als **Theoretische Nullhypothesenverteilung** oder kurz **Nullhypothesenverteilung** oder noch kürzer **Nullverteilung**.

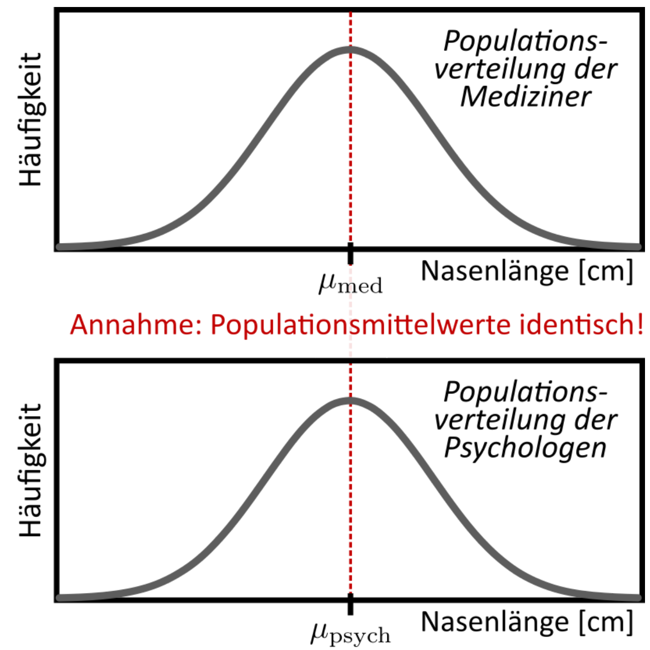


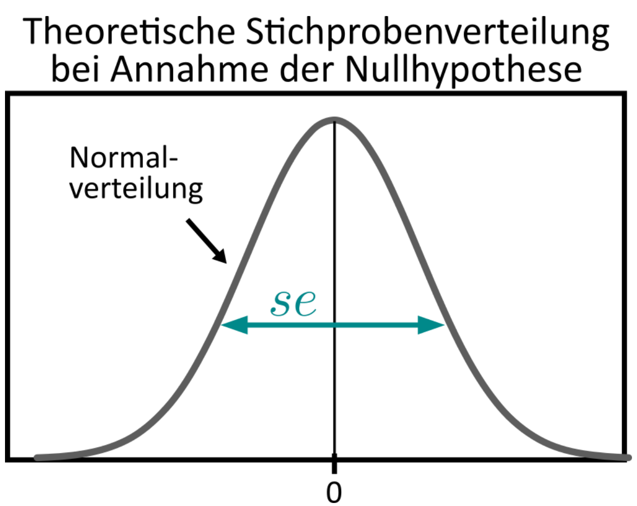
Konstruktion der Nullverteilung

Konstruktion der Nullverteilung

Die Nullhypothese besagt, dass es den vermuteten Effekt in der Population **nicht gibt**. In unserem Nasenlängenbeispiel wäre dies beispielsweise der Fall, wenn sich die wahren Nasenlängenpopulationsmittelwerte zwischen Psychologen und Medizinern **nicht unterscheiden**, also in Wahrheit gilt:

$$\mu_{\text{med}} = \mu_{\text{psych}}$$





Wenn diese Annahme zuträfe, wüssen wir, dass für die Differenz der Nasenlängenmittelwerte gilt: $\mu_{\text{med}} - \mu_{\text{psych}} = 0$. Damit wäre auch klar, wie die theoretische Erwartung für die Stichprobenverteilung aussähe, nämlich eine **Normalverteilung mit Mittelwert 0**. Das ist die Nullverteilung!

Die Streuung der Nullverteilung kennen wir auch. Da es sich um eine Stichprobenverteilung handelt, entspricht die Standardabweichung der Verteilung dem **Standardfehler** se.

Konstruktion der Nullverteilung

In der Praxis ist die Streuung se idR nicht bekannt und muss als $\hat{se}$ geschätzt werden. Wir betrachten diesen etwas komplexeren Fall hier noch nicht. Jedoch ist diese Problematik größer, als auf den ersten Blick angenommen, und führt uns in der Vorlesung zum t-Test zur Erkenntnis, dass die Annahme einer Normalverteilung für die Nullhypothesenverteilung nicht mehr gerechtfertigt ist (stattdessen benötigen wir dann die t-Verteilung). Behalten Sie dies im Hinterkopf!

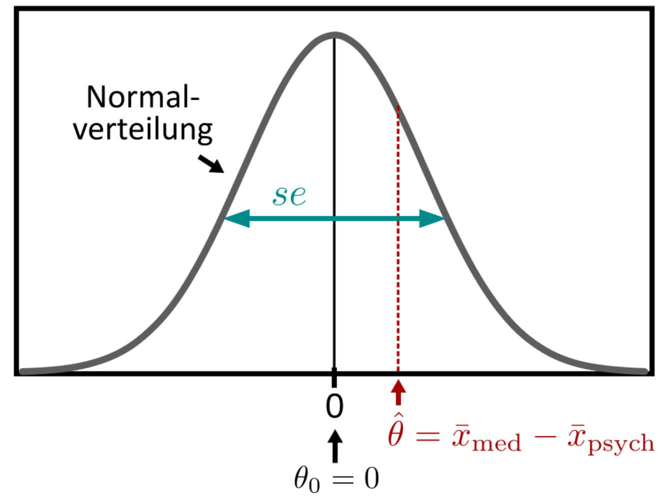
Konstruktion der Nullverteilung: Hinweis zum Mittelwert θ_0

In unserem Beispiel hatten wir als Nullhypothese:

$$\theta = \mu_{\text{psych}} - \mu_{\text{med}} \leq 0$$

… also die Null-Annahme, dass die Nasenlängen der Psychologen *nicht größer* bzw. *kleiner gleich* sind als die Nasenlängen der Mediziner. Die zugehörige Nullhypothesenverteilung ist eine Normalverteilung mit Mittelwert $\theta_0 = 0$.

Theoretische Nullhypothesenverteilung



Frage: warum eigentlich gerade $\theta_0 = 0$ und nicht irgendein Wert $\theta_0 < 0$? Schließlich besagt die Nullhypothese im Beispiel ja gerade $\theta \leq 0$, also die Annahme, dass der Effekt θ in der Population kleiner oder gleich Null ist?

Antwort: $\theta_0 = 0$ ist der "unvorteilhafteste" Mittelwert für die Ablehnung der Nullhypothese, da $\theta_0 = 0$ dem Stichprobeneffekt $\hat{\theta}$ näher ist als alle anderen potentiellen H_0-Mittelwerte $\theta_0 < 0$. Wir bewerten also einen empirischen Effekt $\hat{\theta}$ als signifikant, wenn er so stark ist, dass wir die Nullhypothese sogar unter Annahme des Mittelwertes $\theta_0 = 0$ ablehnen können. Für $\theta_0 < 0$, kann in diesem Fall die Nullhypothese erst recht abgelehnt werden.

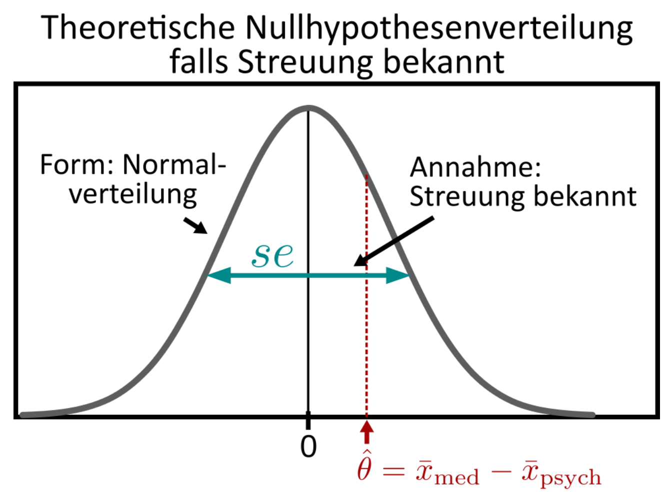
Kurzum: es genügt für $\theta_0 = 0$ zu testen, alle anderen Fälle $\theta_0 < 0$ sind damit abgedeckt.

z-Test

Vereinfachung: Populationsstreuungen bekannt

- In einem ersten Schritt betrachten wir den **vereinfachten Fall, dass die Streuung se bekannt ist**.
- Entweder ist se selbst bekannt, oder aber die Streuungen σ der Merkmale, die dem Effekt zugrunde liegen, denn aus diesen lässt sich se ableiten.
- Im Nasenlängenbeispiel etwa können wir annehmen, dass die Populationsstreuungen σ_{med} und σ_{psych} des Merkmals Nasenlänge bekannt sind. Der Standardfehler se der Mittelwertdifferenz lässt sich aus diesen Populationsstreuungen wie folgt ableiten (siehe Cheatsheet):

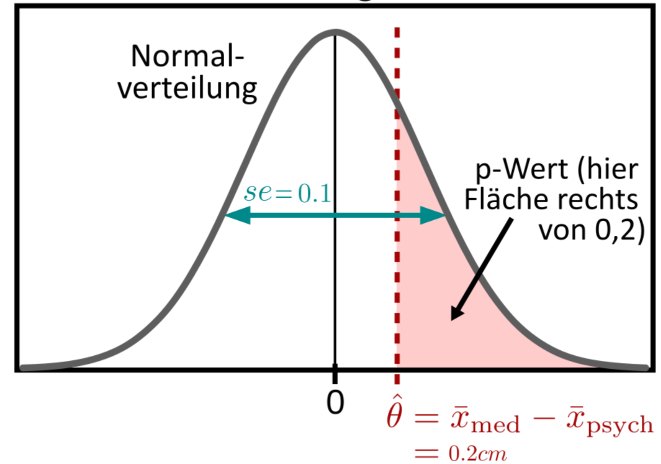
$$se = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\text{med}}}{n_{\text{med}}} + \frac{\sigma^2_{\text{psych}}}{n_{\text{psych}}}}$$



Vereinfachung: Populationsstreuungen bekannt

- Nehmen wir an, der Standardfehler der Mittelwertdifferenz von Psychologen- und Medizinernasenlängen ist als $se = 0.1$ bekannt.
- Mit dieser Information können wir können unseren ersten p-Wert berechnen!
- Der p-Wert ist im Beispiel die Wahrscheinlichkeit der gemessenen Nasenlängendifferenz $\Delta\bar{x}$ *oder eines noch größeren Effektes* unter der Nullhypothesenverteilung.
- Dazu muss die Fläche unter der Nullhypothesenverteilung rechts von $\hat{\theta} = \Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{med}} - \bar{x}_{\text{psych}}$ berechnet werden.

Theoretische Nullhypothesenverteilung falls Streuung bekannt



Vereinfachung: Populationsstreuungen bekannt

Die Fläche bzw. der p-Wert berechnet sich wie folgt:

$$p = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(\hat{\theta}) =$$

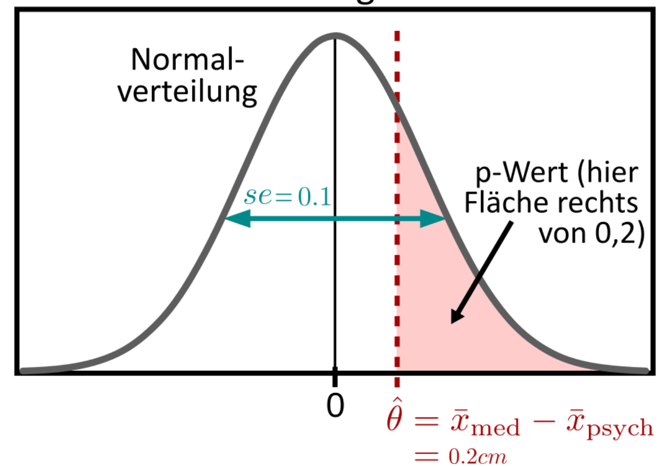
$$= 1 - F(0.2) \overset{(Computer)}{\approx} 0.023$$

wobei $f(x)$ bzw. $F(x)$ hier die Dichte bzw. Verteilungsfunktion der gebenen Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 0.1)$ ist.

$F(x)$ berechnet die Fläche bis zum Punkt x, "1 minus diese Fläche" gibt uns also die Fläche rechts vom angebenen Punkt x — im vorliegenden Fall die Fläche rechts von $\hat{\theta} = \Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{med}} - \bar{x}_{\text{psych}} = 0.2$.

Der p-Wert ist 0.023.

Theoretische Nullhypothesenverteilung falls Streuung bekannt



In Worten können wir feststellen: die Wahrscheinlichkeit, dass unser Effekt $\hat{\theta} = \Delta\bar{x}$ durch Zufall entstanden ist — also unter der Annahme, dass die Nullhypothese gilt — beträgt (nur) 2.3%.

z-Wert — eine standardisierte Prüfgröße

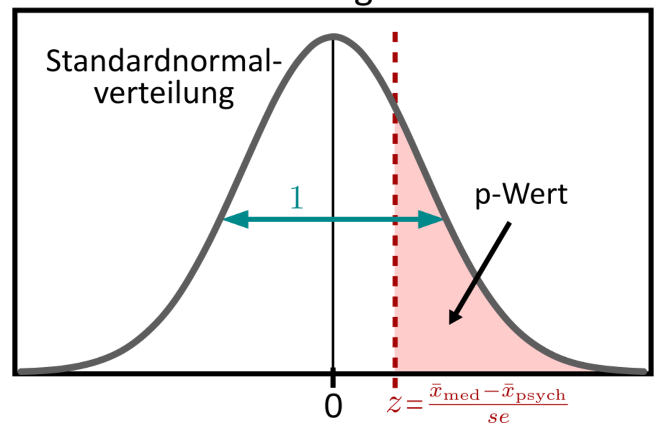
- In der Praxis wird die Berechnung von p-Werten um das Konzept der **standardisierten Prüfgröße** erweitert.
  - Um das Konzept zu verstehen, erinnern wir uns, dass wir im Beispiel eine Fläche unter der Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 0.1)$ berechnet haben. Für die nächste statistische Analyse müssten wir sehr wahrscheinlich die Fläche unter einer Normalverteilung mit einer anderen Streuung als 0.1 berechnen.
  - Gerade im Vorcomputerzeitalter war die Berechnung von Flächen unter beliebigen Normalverteilungen eine Herausforderung.

Abhilfe schafft die **Standardisierung des Effektes**:

$$z = \frac{\hat{\theta}}{se}$$

Nach Teilen von $\hat{\theta}$ durch die Streuung se, hat die Nullverteilung nicht mehr die Streuung se, sondern *immer* die Streuung $\frac{se}{se} = 1$!

Theoretische Nullhypothesenverteilung falls Streuung bekannt

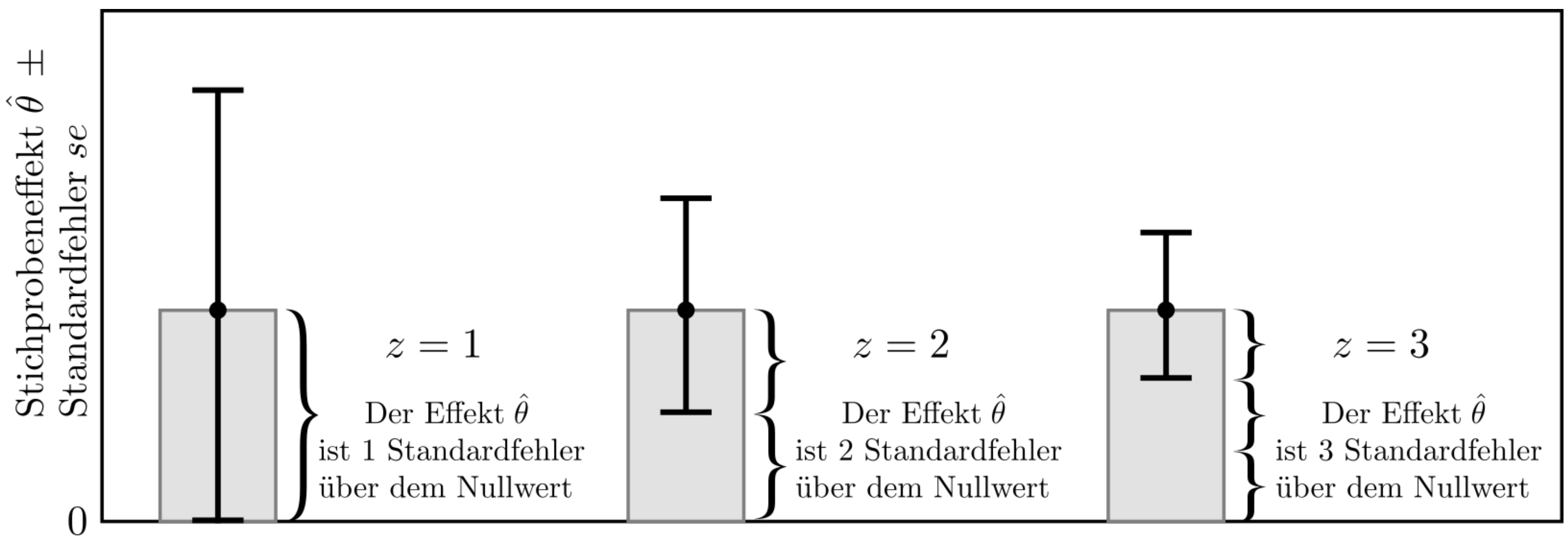


z wird als **standardisierte Prüfgröße** bezeichnet, während der einfache Effekt $\hat{\theta}$ (z.B. $\Delta\bar{x}$) eine **unstandardisierte Prüfgröße** darstellte.

z-Wert — eine standardisierte Prüfgröße

Es gibt auch im Computerzeitalter noch Vorteile für diese Art der Standardisierung:

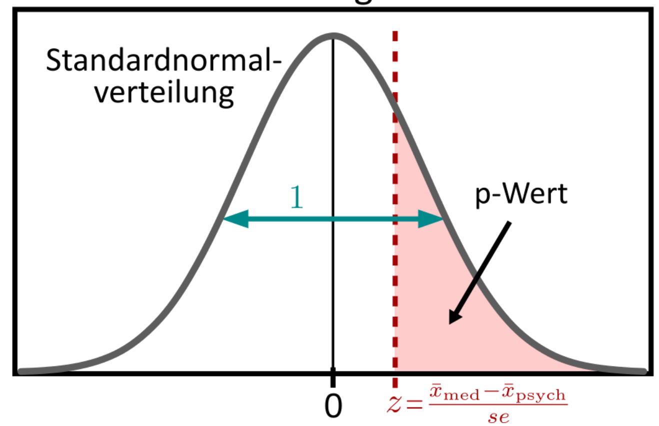
- Der resultierende z-Wert ist vergleichbar zwischen Studien, im Gegensatz zu unstandardisierten Effekten $\hat{\theta}$ wie dem Mittelwertsunterschied $\Delta\bar{x}$, die von der spezifischen Skala abhängen.
- Der z-Wert hat eine (halbwegs) intuitive Interpretation: er gibt an, *wie viele Standardfehler der Effekt von einem Nulleffekt entfernt ist*.



z-Test

Mit dem z-Wert als Prüfgröße benötigten wir für alle Tests dieser Art nur noch eine einzige Verteilung — die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streuung 1, also die **Standardnormalverteilung**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \underset{\sigma=1}{\overset{\mu=0}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

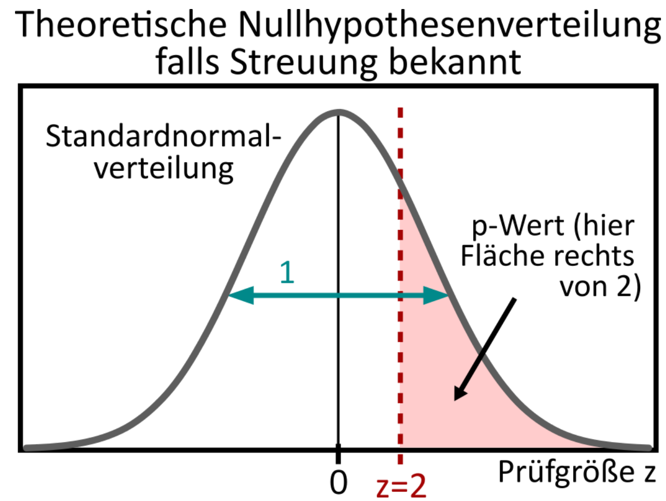


Die Art der Berechnung des p-Wertes ändert sich nicht — wir berechnen in unserem Beispiel weiterhin die Fläche rechts von unserem Effekt, nur dass der "Effekt" jetzt standardisiert und als $z = \frac{\hat{\theta}}{se} = \frac{\Delta\bar{x}}{se} = \frac{\bar{x}_{\text{med}} - \bar{x}_{\text{psych}}}{se}$ definiert ist. Der resultierende p-Wert ist derselbe.

Der **z-Test** ist ein statistischer Nullhypothesentest, der auf Basis der standardisierten Prüfgröße $z = \frac{\hat{\theta}}{se}$ durchgeführt wird.

z-Test

Berechnen wir nun den p-Wert im Nasenlängenbeispiel mithilfe des z-Tests.



Wir bestimmen die standardisierte Prüfgröße z:

$$z = \frac{\hat{\theta}}{se} = \frac{\Delta \bar{x}}{se} = \frac{0.2}{0.1} = 2$$

Und berechnen die Fläche rechts von z:

$$p = \int_z^{\infty} \varphi(x) dx = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(2) \overset{(Computer)}{=} 0.023$$

Beachte, dass wir hier statt $f(x)$ die Nomenklatur $\varphi(x)$ für die Dichte der Standardnormalverteilung verwenden, und statt $F(x)$ den Ausdruck $\Phi(x)$ für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

z-Test: Cheat Sheet für Mittelwertdifferenzen

Der z-Test kann auf alle Arten von Mittelwertsvergleichen angewendet werden:

Fall	z-Wert	Bekannt	Standardfehler
Einzelmessung: Vergleich von $\bar{x}$ mit einem Referenzwert μ_0	$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{se}$	σ	$se = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Abhängige Messungen: Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ von *zwei Bedingungen A und B in einer Gruppe*	$z = \frac{\bar{x}_A-\bar{x}_B}{se} = \frac{\Delta\bar{x}}{se}$	σ_A, σ_B, ρ	$se = \frac{\sigma_\Delta}{\sqrt{n}}$ mit $\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\,\rho\sigma_A\sigma_B}$
Unabhängige Messungen: Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ von *zwei unabhängigen Gruppen A und B*	$z = \frac{\bar{x}_A-\bar{x}_B}{se} = \frac{\Delta\bar{x}}{se}$	σ_A, σ_B	$se = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$

Die Formeln für die Standardfehler gelten für den Fall, dass die **Varianzen σ_A^2 bzw. σ_B^2 in den Populationen bekannt sind** (wie beim z-Test). Siehe Bonuscontent für eine Herleitung der Standardfehler von Mittelwertdifferenzen.

Sind die Populationsstreuungen nicht bekannt, sehen die Standardfehlerformeln aufgrund der Besselkorrektur etwas anders aus (→ siehe t-Test in Vorlesung 11).

Das ABC der Hypothesentestung

- Einstichprobentest und Zweistichprobentest
- Signifikanzniveau
- Ein- und zweiseitiges Testen

Einstichprobentest versus Zweistichprobentest

Statistische Tests, die sich auf eine Stichprobe beziehen (Einzelmessung oder Vergleich zweier abhängiger Messungen) werden auch als **Einstichprobentest** bezeichnet.

Beispielhypothesen für den Einstichprobentest:

- Einzelmessung: Psychologiestudierende sind überdurchschnittlich intelligent (μ_{IQ} = mittler IQ in der Population)
  - Nullhypothese: $\mu_{\text{IQ}} \leq 100$ Alternativhypothese: $\mu_{\text{IQ}} > 100$
  - Beachte: der "Nullwert" μ_0 ist in diesem Fall 100 und nicht 0!
- Abhängige Messungen: Psychologiestudierende sind morgens intelligenter als abends ($\Delta\mu_{\text{IQ}} = \mu_{\text{IQ, Morgen}} - \mu_{\text{IQ, Abend}}$)
  - Nullhypothese: $\Delta\mu_{\text{IQ}} \leq 0$ Alternativhypothese: $\Delta\mu_{\text{IQ}} > 100$

Demgegenüber werden statistische Tests, die sich auf zwei unabhängige Stichproben beziehen, als **Zweistichprobentest** bezeichnet.

Beispielhypothese für den Zweistichprobentest:

- Studierende der HMU sind intelligenter als Studierende der MSB ($\Delta\mu_{\text{IQ}} = \mu_{\text{IQ, HMU}} - \mu_{\text{IQ, MSB}}$)
  - Nullhypothese: $\Delta\mu_{\text{IQ}} \leq 0$ Alternativhypothese: $\Delta\mu_{\text{IQ}} > 100$

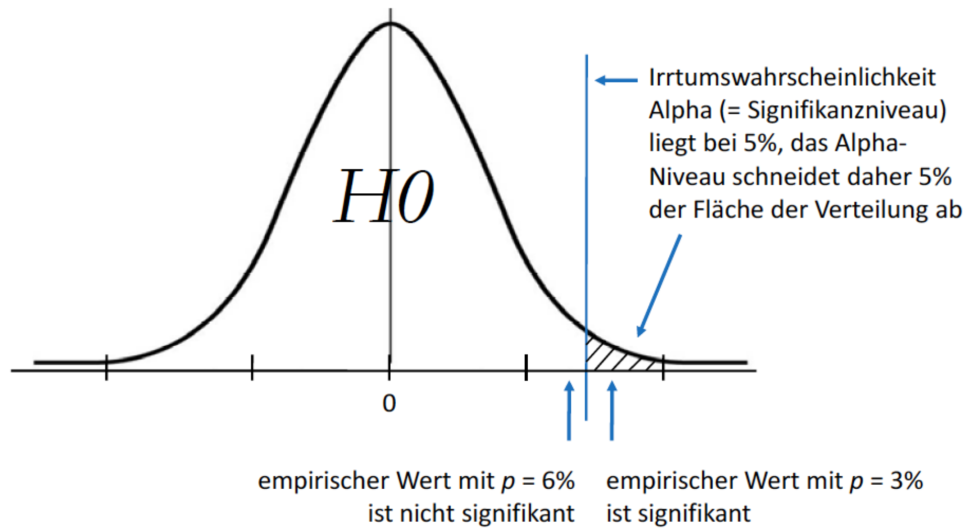
Signifikanzniveau ($p < \alpha$?)

Bislang haben wir die Berechnung des p-Wertes besprochen, aber nicht, wie klein der p-Wert sein sollte, um die Nullhypothese abzulehnen (und im Umkehrschluss den Effekt signifikant zu werten).

Um diese Entscheidung zu treffen, legen wir ein **Signifikanzniveau** α fest. **Unterschreitet der p-Wert das Signifikanzniveau α, lehnen wir die Nullhypothese ab** und werten den **Effekt als statistisch signifikant**.

Der Wert α wird auch als **Irrtumswahrscheinlichkeit** bezeichnet. Ist beispielsweise $\alpha = 0.1$ so wären wir bereit einen p-Wert von $p < 0.1$ als signifikant zu werten, gehen dabei aber ein 10%-iges Risiko ein, dass die Nullhypothese in Wahrheit doch korrekt ist. D.h. wir nehmen in Kauf, dass wir uns mit 10% Wahrscheinlichkeit irren und fälschlicherweise die Nullhypothese ablehnen.

Auf welchen Wert das Signifikanzniveau festgelegt werden sollte ist seit langer Zeit Gegenstand von kontroversen Debatten in der Psychologie. Als de facto Standard-Signifikanzniveau hat sich jedoch der **Wert $\alpha = 0.05$** eingebürgert.



Ein- und zweiseitiges Testen

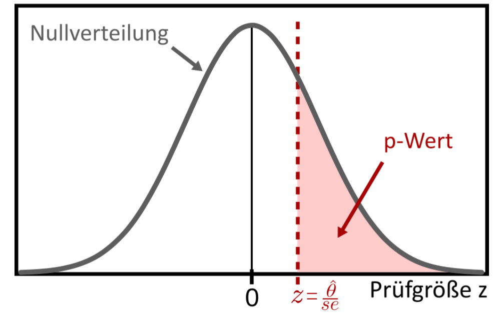
Bislang haben wir konkrete **gerichtete Hypothese** betrachtet, etwa indem bei der Nasenlängenhypothese festgelegt wurde, welche der beiden Gruppen im Mittel eine längere Nase hat. Es gibt jedoch insgesamt **drei Fälle**.

Rechtsseitige gerichtete Hypothese: gibt Richung vor

Hypothese: $\theta > 0$
Beispiel: *Medizinernasen sind länger als Psychologennasen*

$$\Delta\mu > 0 \quad \text{mit} \quad \theta = \Delta\mu = \mu_{\text{med}} - \mu_{\text{psych}}$$

Einseitiger Test rechts ($\theta > 0$)

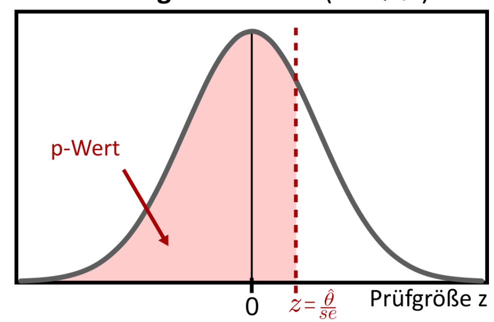


Linksseitige gerichtete Hypothese: gibt Richung vor

Hypothese: $\theta < 0$
Beispiel: *Medizinernasen sind kürzer als Psychologennasen*

$$\Delta\mu < 0 \quad \text{mit} \quad \theta = \Delta\mu = \mu_{\text{med}} - \mu_{\text{psych}}$$

Einseitiger Test links ($\theta < 0$)

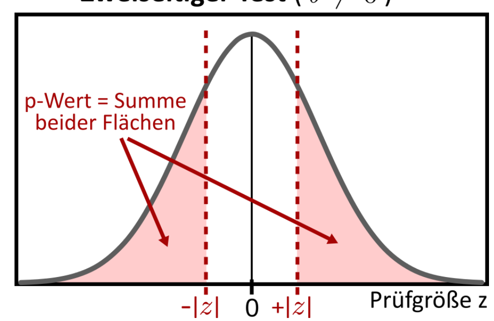


Ungerichtete Hypothese: gibt keine Richtung vor

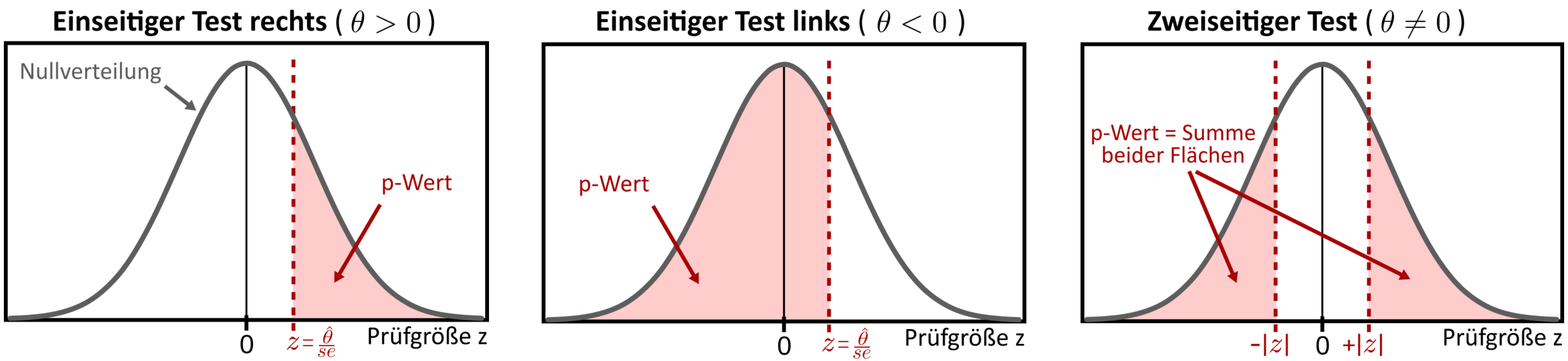
Hypothese: $\theta \neq 0$
Beispiel: *Medizinernasen und Psychologennasen sind unterschiedlich lang*

$$\Delta\mu \neq 0 \quad \text{mit} \quad \theta = \Delta\mu = \mu_{\text{med}} - \mu_{\text{psych}}$$

Zweiseitiger Test ($\theta \neq 0$)



Ein- und zweiseitiges Testen



Wie sehen folgende Zusammenhänge:

- Die **p-Werte der beiden gerichteten Hypothesen** ("größer als" oder "kleiner als") sind genau **invers**:

$$p(\theta > 0) = 1 - p(\theta < 0)$$

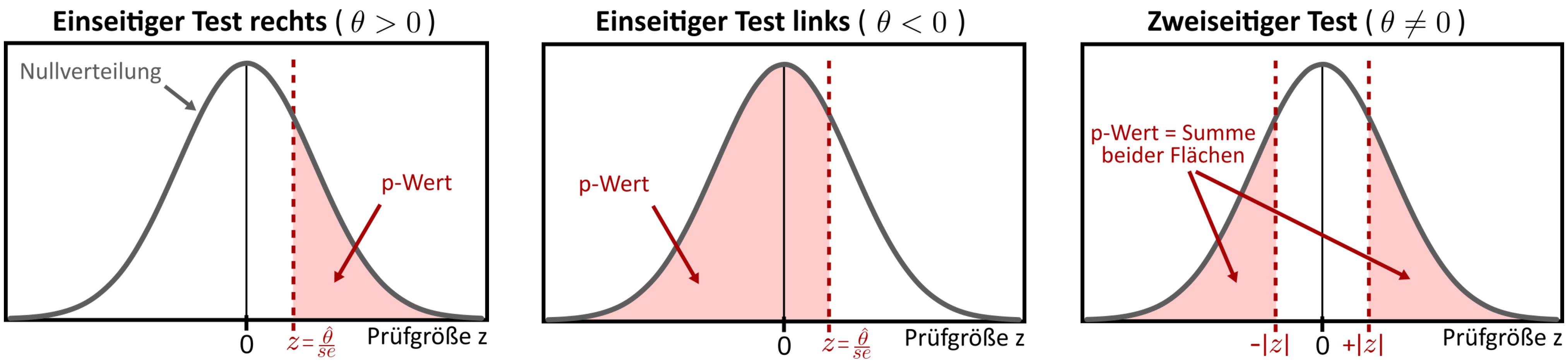
Beispiel: $p(\mu_{\text{med}} > \mu_{\text{psych}}) = 1 - p(\mu_{\text{med}} < \mu_{\text{psych}})$

- Der **p-Wert der ungerichteten Hypothese** ("unterschiedlich") ist gleich **2 x der kleinere p-Wert der beiden gerichteten Hypothesen**:

$$p(\theta \neq 0) = 2 \times \min\Big(p(\theta > 0), p(\theta < 0)\Big)$$

Beispiel:
$p(\mu_{\text{med}} \neq \mu_{\text{psych}}) = 2 \times \min\Big(p(\mu_{\text{med}} > \mu_{\text{psych}}), p(\mu_{\text{med}} < \mu_{\text{psych}})\Big)$

Ein- und zweiseitiges Testen



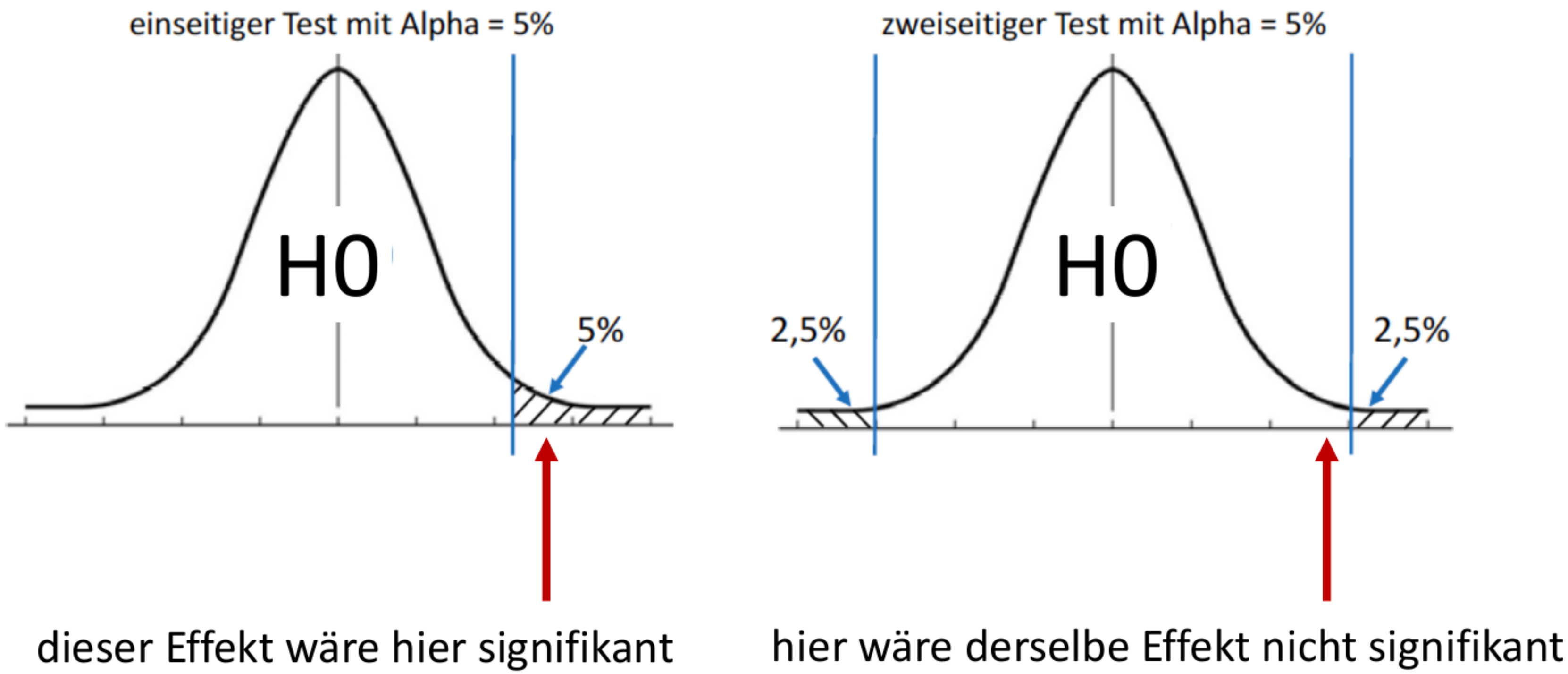
Der p-Wert der ungerichteten Hypothese ist damit immer größer (doppelt so groß) wie der kleinere p-Wert der gerichteten Hypothesen.

Intuition: bei der ungericheteten Hypothese legen wir uns weniger fest, denn unsere Hypothese wäre sowohl erfüllt wenn $\bar{x}_{\text{med}}$ signifikant größer ist als $\bar{x}_{\text{psych}}$, als auch wenn $\bar{x}_{\text{med}}$ signifikant kleiner ist als $\bar{x}_{\text{psych}}$. Wir machen uns das Leben (bzw. unsere Vorhersagen) also "einfacher".

Genauer gesagt verdoppeln wir unsere Chance, die Nullhypothese abzulehnen, da unter der Annahme der Nullhypothese jeglicher beobachteter z-Wert mit gleichen Flächen links von $-|z|$ und rechts von $+|z|$ verbunden ist. Dies wird durch die Verdopplung des p-Wertes der gerichteten Hypothese kompensiert — man könnte auch sagen "die Verdopplung des p-Wertes bestraft unsere schwammige ungerichtete Vorhersage".

Ein- und zweiseitiges Testen

Es ist zusätzlich gewinnbringend, sich den Vergleich von gerichteten und ungerichteten Hypothesen aus der Perspektive des Signifikanzniveaus α zu betrachten:



Beim zweiseitigen Test verteilt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit (im Bild 5%) *auf beide Flanken* der Nullverteilung. Es wird damit auf beiden Seiten schwieriger für unseren Effekt einen noch extremeren Wert aufzuweisen, als durch die Irrtumswahrscheinlichkeit vorgegeben.

Eigenschaften und Verhalten des p-Wertes

p-Wert versus Stichprobengröße & Populationsstreuung

Wir werten einen Effekt als **signifikant**, wenn der p-Wert kleiner dem Signifkanzniveau α ist.

Es gilt: je kleiner der p-Wert, desto…

… weniger kompatibel ist unser Stichprobeneffekt $\hat{\theta}$ mit der Nullhypothese.

… schärfer lehnen wir also die Nullhypothese H_0 ab.

… stärker ist die Evidenz für unsere Alternativhypothese H_1.

… statistisch bedeutsamter ist unser Stichprobeneffekt $\hat{\theta}$.

p-Wert versus Stichprobengröße & Populationsstreuung

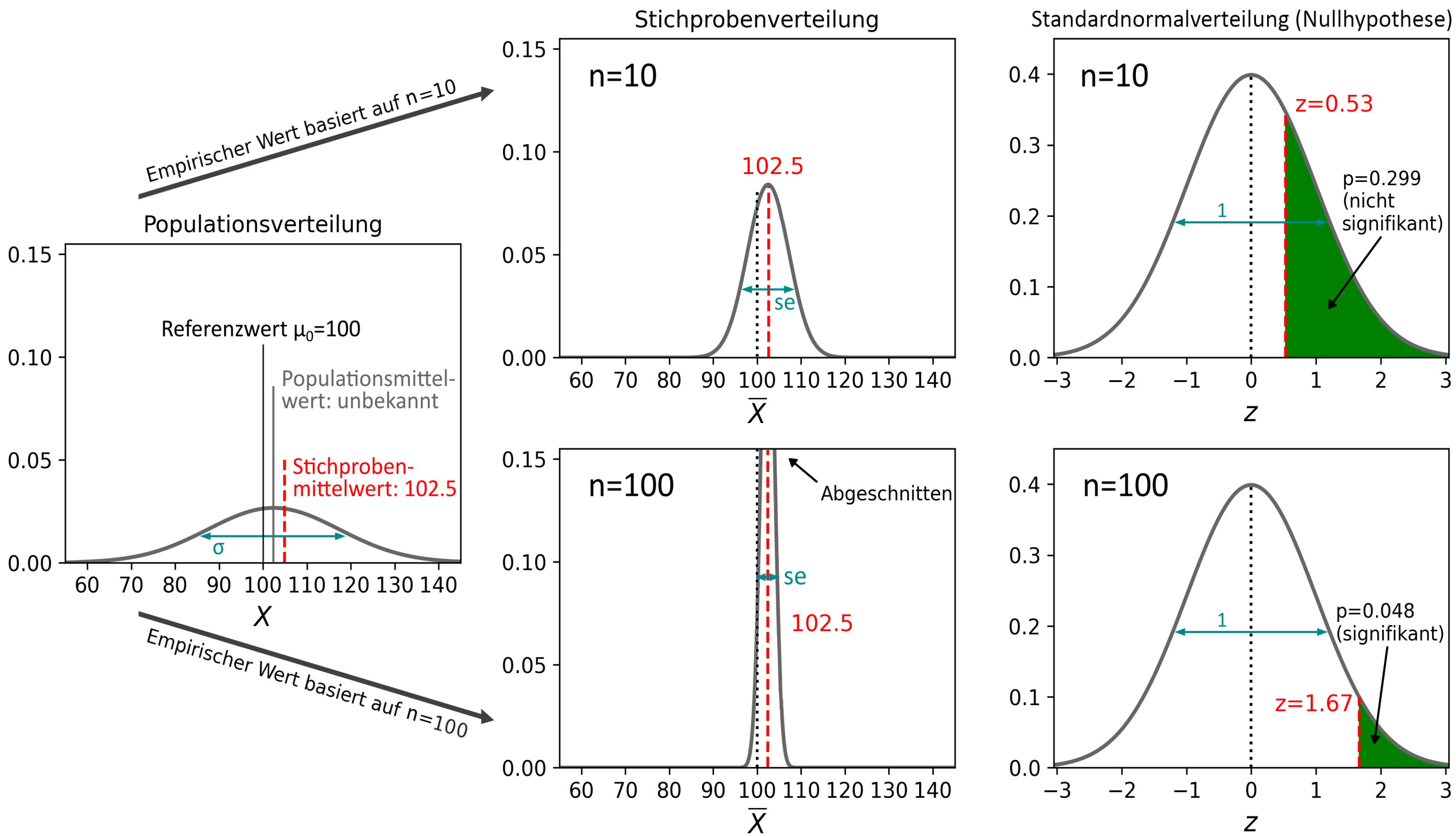
Gibt es den hypothesierten Effekt in der Population tatsächlich (Alternativhypothese wahr), gilt:

- Größere Stichprobengrößen führen im Schnitt zu kleineren p-Werten.
- Kleinere Populationsstreuungen führen zu kleineren p-Werten.

Gibt es den hypothesierten Effekt in der Population nicht (Nullhypothese wahr), gilt:

- Größere Stichprobengrößen haben keine Auswirkung auf den p-Wert.
- Kleinere Populationsstreuungen haben keine Auswirkung auf den p-Wert.
- Alle p-Werte sind gleich wahrscheinlich (d.h. p-Werte haben eine uniforme Verteilung auf dem Intervall [0; 1]).

p-Wert versus Stichprobengröße: Beispiel



Getestet wird, ob der IQ der betrachteten Population (hier 102.5) größer ist, als der Referenzwert $\mu_0 = 100$, der idealerweise den durchschnittlichen IQ aller Menschen darstellt. Im Bild ist zu sehen, dass die betrachtete Population (z.B. alle Brandenburger:innen) tatsächlich einen etwas höheren Mittelwert als 100 aufweisen, was sich auch im Stichprobenmittelwert niederschlägt. **Wie verändert sich der p-Wert abhängig davon, ob die Stichprobe $n = 10$ oder $n = 100$ umfasst? Schritt 1:** der Standardfehler se ist bei der höheren Stichprobenzahl wesentlich kleiner (aufgrund von $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$) und damit die Stichprobenverteilung bei $n = 100$ wesentlich schmaler. **Schritt 2:** der kleinere Standardfehler wirkt sich auf den z-Wert $z = \frac{102.5}{se}$ aus: kleinerer Standardfehler bedeutet größerer z-Wert. **Schritt 3:** größerer z-Wert bedeutet kleinerer p-Wert, da kleinere Fläche rechts von z.

[[Zusammenfassung]]

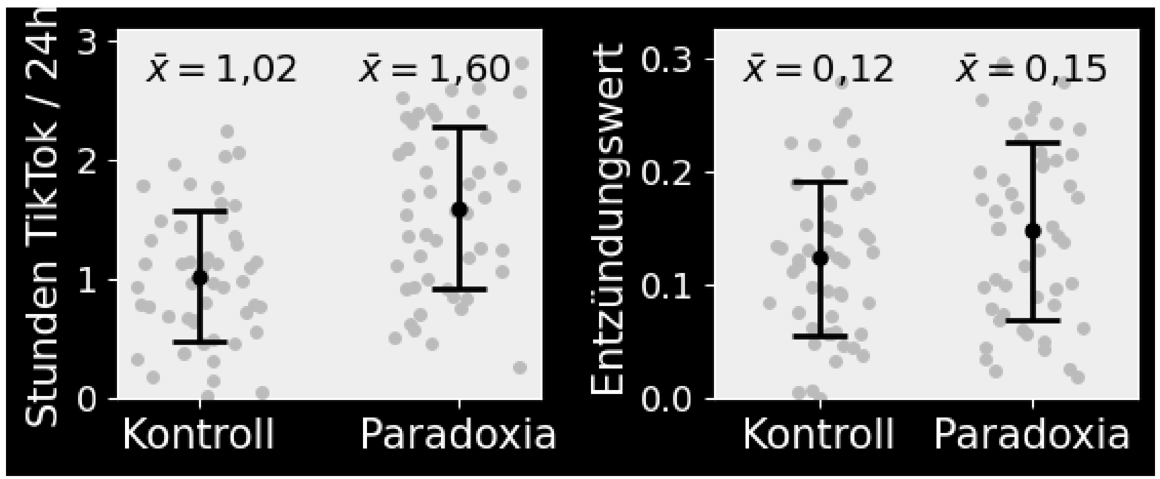
- Bei der **Nullhypothesentestung** nach Fisher wird die Wahrscheinlichkeit geprüft, mit der ein beobachteter Effekt $\hat{\theta}$ (oder ein noch extremerer Effekt) durch Zufall entstanden sein könnte — d.h. für die Annahme dass die *Nullhypothese tatsächlich zutreffend* ist.
- Diese Wahrscheinlichkeit wird als **p-Wert** bezeichnet — je kleiner der p-Wert, desto weniger haltbar ist die Nullhypothese, desto stärker die **statistische Signifikanz**.
- Ein Effekt wird als statistisch signifikant gewertet, wenn der p-Wert unterhalb eines festgelegten **Signifikanzniveaus** α liegt (in diesem Fall wird die "Nullhypothese abgelehnt").
- Sind die Populationsstreuungen bekannt, so erfolgt die statistische Testung anhand der **Prüfgröße** z (**z-Wert**) in Verbindung mit der **Standardnormalverteilung**.
- Abhängig davon ob die untesuchte Hypothese **gerichtet** oder **ungerichtet** ist, erfolgt die statistische Testung entweder als **einseitiger Test** oder als **zweiseitiger Test**.

Nach kurzer Beratung in der Task Force ist Ihnen klar, dass die Voraussetzungen für einen z-Test nicht gegeben sind, da die Populationsstreuungen σ nicht bekannt sind, sondern als $\hat{\sigma}$ geschätzt wurden. Aus Neugier rechnen Sie dennoch z-Tests für die Gruppenvergleiche und nehmen dafür an: $\sigma = \hat{\sigma}$.

Sie erstellen sich eine Tabelle mit den relevanten Parametern für den z-Test:

TikTok	**Fallzahl n**	**Mittelwert $\bar{x}$**	**Standardabweichung σ**
Kontroll	50	$1{,}022$	$0{,}545$
Paradoxia	50	$1{,}599$	$0{,}677$

Entzündung	**Fallzahl n**	**Mittelwert $\bar{x}$**	**Standardabweichung σ**
Kontroll	50	$0{,}1233$	$0{,}0682$
Paradoxia	50	$0{,}1477$	$0{,}0783$



Um den z-Wert zu bestimmen, benötigen Sie den Standardfehler. Da es sich um unabhängige Messungen in zwei Gruppen handelt, verwenden Sie die Formel, die auf der mittleren Varianz beider Gruppen basiert:

$$se = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\text{control}}}{n_{\text{control}}} + \frac{\sigma^2_{\text{paradox}}}{n_{\text{paradox}}}}$$

Sie erhalten:

$$\text{TikTok:} \qquad se = \sqrt{\frac{0,545^2}{50} + \frac{0{,}677^2}{50}} = 0{,}123 \qquad \Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{paradox}} - \bar{x}_{\text{control}} = 1{,}599 - 1{,}022 = 0{,}577$$

$$\text{Entzündung:} \qquad se = \sqrt{\frac{0{,}0682^2}{50} + \frac{0{,}0783^2}{50}} = 0{,}0147 \qquad \Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{paradox}} - \bar{x}_{\text{control}} = 0{,}1477 - 0{,}1233 = 0{,}0243$$

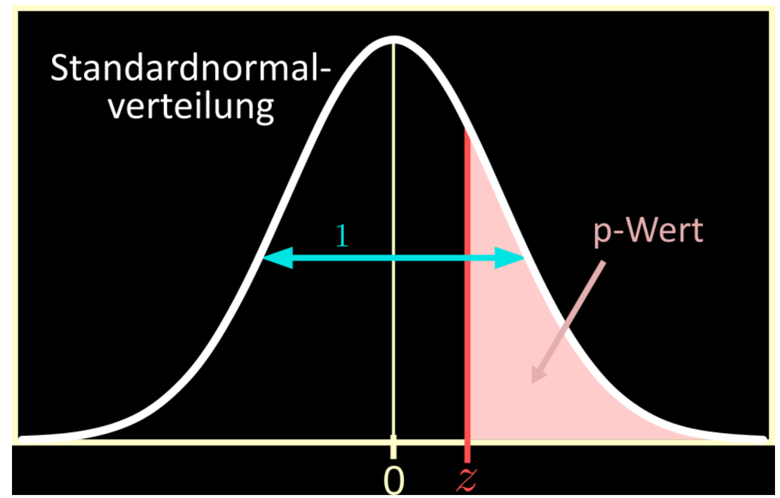
Der z-Wert ergibt sich als das Verhältnis aus dem “Effekt” (hier $\Delta\bar{x}$) und dem Standardfehler:

$$\text{TikTok:} \qquad z = \frac{\hat{\theta}}{se} = \frac{\Delta\bar{x}}{se} = \frac{0{,}577}{0{,}123} = 4{,}69$$

$$\text{Entzündung:} \qquad z = \frac{\hat{\theta}}{se} = \frac{\Delta\bar{x}}{se} = \frac{0{,}0243}{0{,}0147} = 1{,}65$$

In beiden Fällen haben Sie eine **gerichtete** Hypothese, nämlich dass Pardoxiker höhere Werte als Kontrollen aufweisen. Der p-Wert entspricht also der Fläche unter der Standardnormalverteilung *rechts* vom z-Wert und damit dem Integral:

$$p = \int_z^\infty \varphi(x)dx = 1 - \Phi(z)$$



Die Spannung steigt, als Sie nun zum ersten Mal die Signifikanz Ihrer Ergebnisse beurteilen können. Sie erhalten folgende p-Werte:

$$\text{TikTok:} \qquad p = 1 - \Phi(4{,}69) \overset{\text{(Computer)}}{=} 0{,}000001$$

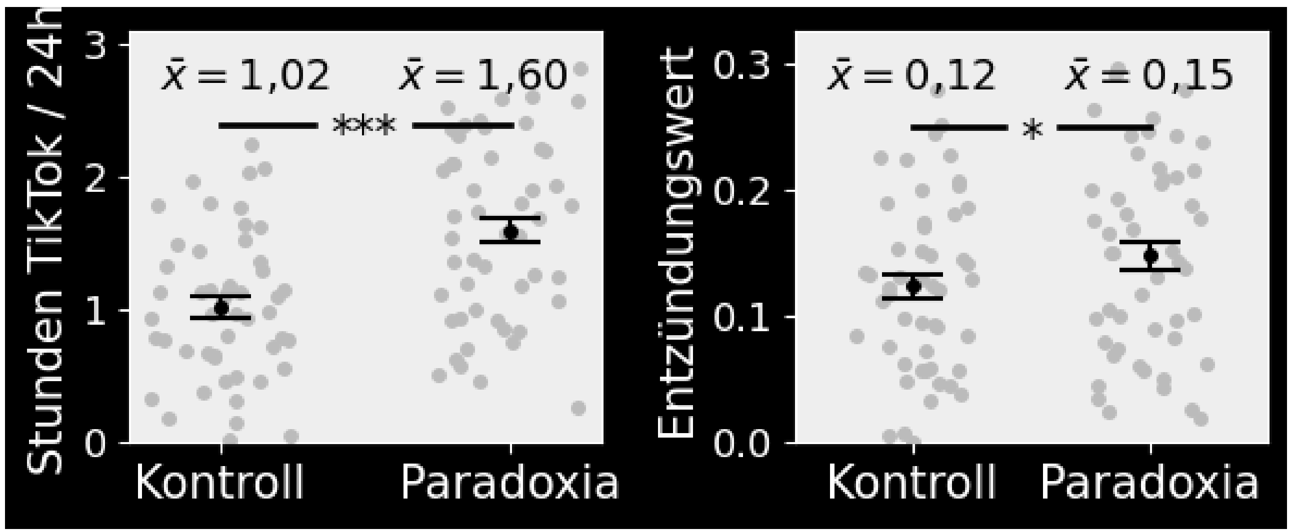
$$\text{Entzündung:} \qquad p = 1 - \Phi(1{,}67) \overset{\text{(Computer)}}{=} 0{,}049$$

Dieser erste Signifikanztest ergibt also, dass die TikTok-Hypothese mit überwältigender Signifikanz bestätigt wird. Aber auch die Entzündungs-Hypothese wird mit einem p-Wert von $0{,}049$ — und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ — um Haaresbreite bestätigt.

Noch genießen Sie die Ergebnisse aber mit Vorsicht, da Ihnen bewusst ist, dass der z-Test nicht der ideale Test für Ihre Studie ist.

Sie aktualisieren vorläufig Ihre vorherige Abbildung in zweierlei Hinsicht:

- Sie ersetzen die Standardabweichung durch den Standardfehler. Dieser legt die Betonung auf den Effekt der Sie interessiert: den Unterschied der Mittelwerte.
- Sie fügen Signifikanzsternchen ein. Eine gängige Notation ist ein Sternchen (*) für p-Werte kleiner 0,05, zwei Sternchen (**) für p-Werte kleiner 0,01 und drei Sternchen (***) für p-Werte kleiner 0,001.



Bonuscontent

z-Test: Herleitung der Standardfehler von Mittelwertdifferenzen

Sind die Populationsstreuungen σ_A und σ_B bekannt (wie beim z-Test vorausgesetzt), lässt sich der Standardfehler se mit den Formeln aus dem Cheatsheet berechnen. Hier betrachten wir die Herleitung dieser Formeln.

Abhängige Messungen in einer Stichprobe

Werden die Messungen X_A und X_B in denselben Versuchspersonen durchgeführt, können wir — wie schon bei der Effektstärke — die Standardabweichung σ_Δ der Differenzenvariable $\Delta X = X_A - X_B$ bestimmen:

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\,\rho\sigma_A\sigma_B}$$

Da σ_Δ in diesem Fall bereits die Standardabweichung des Effektes ist, folgt direkt der Standardfehler:

$$se = \frac{\sigma_\Delta}{\sqrt{n}} \qquad \text{mit} \qquad \sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\,\rho\sigma_A\sigma_B}$$

Wichtig: bei abhängigen Messungen ist, zusätzlich zu den Populationsstreuungen σ_A/σ_B, auch **Kenntnis über die Populationskorrelation** ρ der beiden Variablen X_A und X_B notwendig.

KEIN KLAUSUR STOFF

z-Test: Herleitung der Standardfehler von Mittelwertdifferenzen

Unabhängige Messungen in zwei Stichproben

- Bei unabhängigen Gruppen sind die Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ der beiden Stichproben unabhängige Zufallsvariablen.
- Für die Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$ gilt daher die allgemeine Varianzsummenformel, der zufolge sich bei der Differenzbildung zweier unabhängiger Zufallsvariablen die Varianzen addieren.
- Die Varianz von Mittelwerten ist nichts anderes als der quadrierte Standardfehler, hier se_A^2 und se_B^2.
- Für die Varianz se^2 der Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x}$ gilt also:

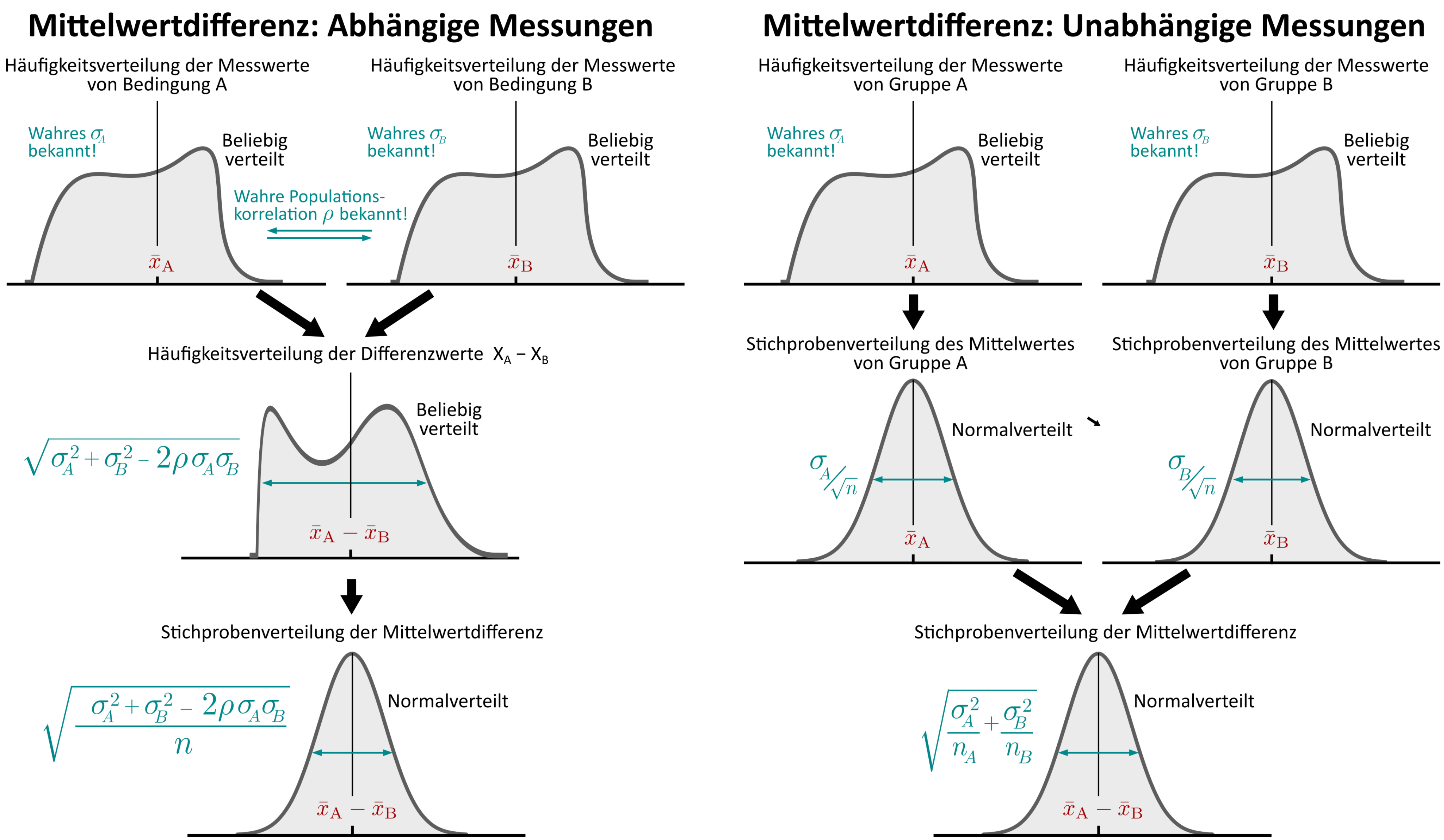
KEIN KLAUSUR STOFF

$$se^2 = se_A^2 + se_B^2 = \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}$$

Wurzel ziehen:

$$se = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

z-Test: Veranschaulichung der Standardfehler von Mittelwertdifferenzen



Fußnoten

1. https://www.majordifferences.com/2016/10/5-differences-between-null-and.html